CINEMÁTICA DEL ROBOT

- Cinemática Directa
- Cinemática Inversa
- Matriz Jacobiana

Problema cinemático del robot

- **Cinemática del robot**: Estudio de su movimiento con respecto a un sistema de referencia:
  - Descripción analítica del movimiento espacial del robot como una función del tiempo.
  - Relaciones entre la posición y orientación del extremo del robot (localización) y los valores de sus coordenadas articulares.
- **Problema cinemático directo:** Determinar la posición y orientación del extremo del robot, con respecto a un sistema de coordenadas de referencia, conocidos los valores de las articulaciones y los parámetros geométricos de los elementos del robot.
- **Problema cinemático inverso**: Determinar la configuración que debe adoptar el robot para alcanzar una posición y orientación conocidas.
- **Modelo diferencial** (matriz Jacobiana): Relaciones entre las velocidades del movimiento de las articulaciones y las del extremo del robot.

Relación entre cinemática directa e inversa

Valor de las coordenadas articulares $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$	**Cinemática directa** → ← **Cinemática inversa**	Posición y orientación del extremo del robot $(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)$

$$q_1 = f_1(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma) \qquad x = f_x(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

$$q_2 = f_2(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma) \qquad y = f_y(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

$$\cdot \quad \cdot \qquad z = f_z(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

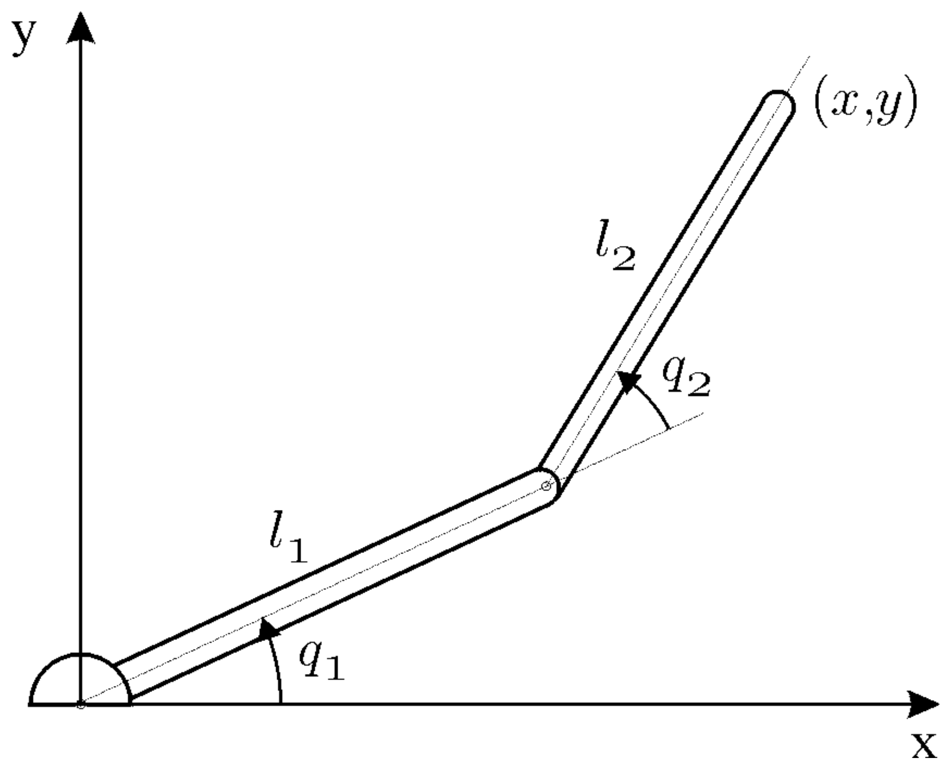
$$\cdot \quad \cdot \qquad \alpha = f_\alpha(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

$$\cdot \quad \cdot \qquad \beta = f_\beta(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

$$q_n = f_n(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma) \qquad \gamma = f_\gamma(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

Obtención del modelo cinemático directo (I)

- **Mediante relaciones geométricas**:
  - Robots con pocos grados de libertad.
  - No es un método sistemático.



$$x = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1+q_2)$$

$$y = l_1 \operatorname{sen} q_1 + l_2 \operatorname{sen}(q_1+q_2)$$

Obtención del modelo cinemático directo (II)

- **Mediante matrices de transformación homogénea**:
  - A cada eslabón se le asocia un sistema de referencia solidario.
  - Es posible representar las traslaciones y rotaciones relativas entre los distintos eslabones.
  - La matriz ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ representa la posición y orientación relativa entre los sistemas asociados a dos eslabones consecutivos del robot.
  - Representación total o parcial de la cadena cinemática del robot:
    - ${}^{0}\mathbf{A}_3 = {}^{0}\mathbf{A}_1\,{}^{1}\mathbf{A}_2\,{}^{2}\mathbf{A}_3$
    - $\mathbf{T} = {}^{0}\mathbf{A}_6 = {}^{0}\mathbf{A}_1\,{}^{1}\mathbf{A}_2\,{}^{2}\mathbf{A}_3\,{}^{3}\mathbf{A}_4\,{}^{4}\mathbf{A}_5\,{}^{5}\mathbf{A}_6$
  - Existen métodos sistemáticos para situar los sistemas de coordenadas asociados a cada eslabón y obtener la cadena cinemática del robot.

Representación de Denavit-Hartenberg (D-H)

- Permite el paso de un eslabón al siguiente mediante 4 transformaciones básicas, que dependen exclusivamente de las características constructivas del robot.
- Las transformaciones básicas que relacionan el sistema de referencia del elemento *i* con el sistema del elemento *i-1* son:

1.- Rotación θ_i alrededor del eje z_{i-1}.
2.- Traslación d_i a lo largo del eje z_{i-1}.
3.- Traslación a_i a lo largo del eje x_i.
4.- Rotación α_i alrededor del eje x_i.

$$
\begin{aligned}
{}^{i-1}\mathbf{A}_i &= \mathbf{T}(\mathbf{z},\theta_\mathbf{i})\mathbf{T}(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{d_i})\mathbf{T}(\mathbf{a_i},\mathbf{0},\mathbf{0})\mathbf{T}(\mathbf{x},\alpha_\mathbf{i}) \\
&= \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Algoritmo de Denavit-Hartenberg (I)

- Numerar los eslabones comenzando con *1* (primer eslabón móvil de la cadena) y acabando con *n* (último eslabón móvil). Se numerará como eslabón 0 a la base fija del robot.

- Numerar cada articulación comenzando por *1* (la correspondiente al primer grado de libertad) y acabando en *n*.

- Localizar el eje de cada articulación. Si ésta es rotativa, el eje será su propio eje de giro. Si es prismática, será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento.

- Para *i* de *0* a *n-1* situar el eje z_i sobre el eje de la articulación *i+1*.

- Situar el origen del sistema de la base $\{S_0\}$ en cualquier punto del eje z_0. Los ejes x_0 e y_0 se situarán de modo que formen un sistema dextrógiro con z_0.

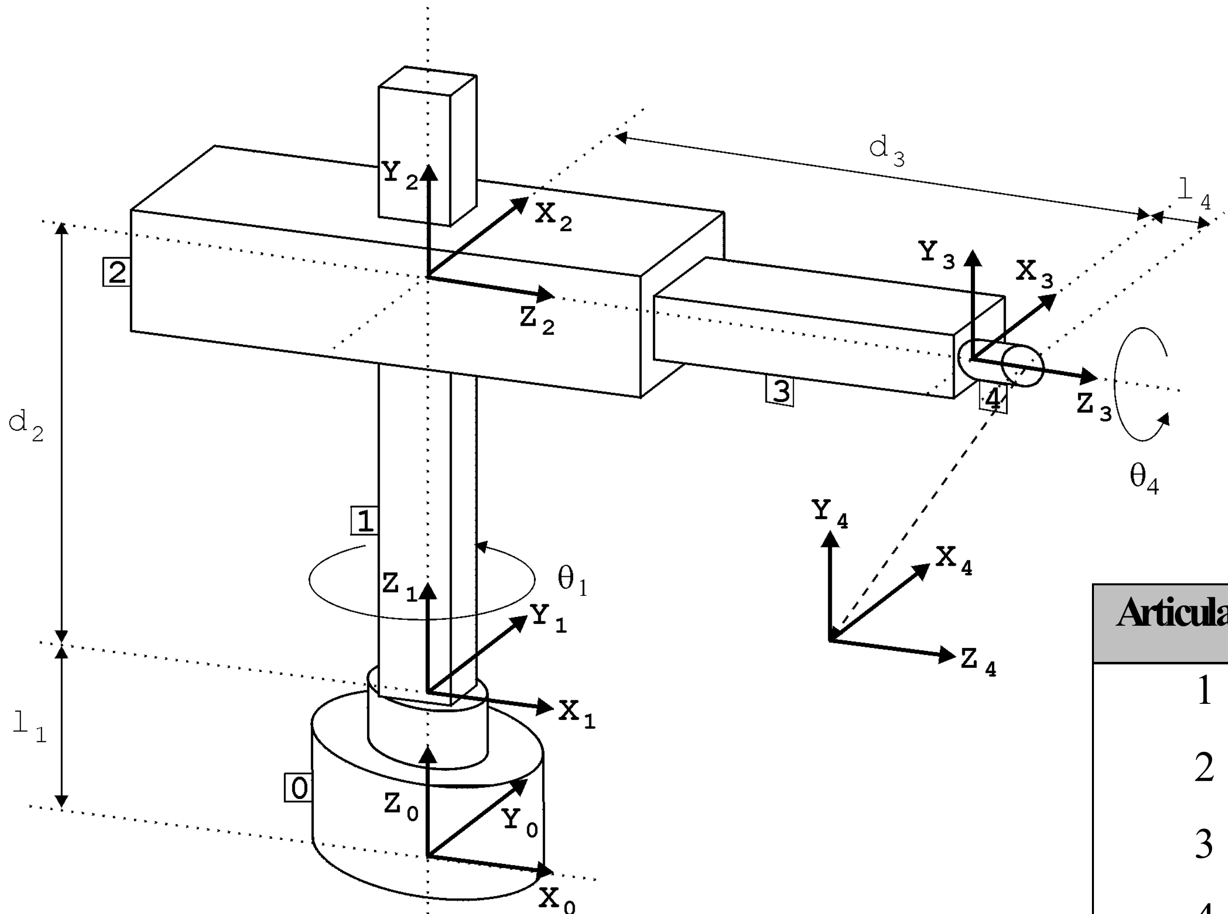
Algoritmo de Denavit-Hartenberg (II)

- Para *i* de *1* a *n-1*, situar el sistema $\{S_i\}$ (solidario al eslabón *i*) en la intersección del eje z_i con la línea normal común a z_{i-1} y z_i. Si ambos ejes se cortasen se situaría $\{S_i\}$ en el punto de corte. Si fuesen paralelos $\{S_i\}$ se situaría en la articulación *i+1*.
- Para *i* de *1* a *n-1*, situar x_i en la línea normal común a z_{i-1} y z_i.
- Para *i* de *1* a *n-1*, situar y_i de modo que forme un sistema dextrógiro con x_i y z_i.
- Situar el sistema $\{S_n\}$ en el extremo del robot de modo que z_n coincida con la dirección de z_{n-1} y x_n sea normal a z_{n-1} y z_n.
- Obtener θ_i como el ángulo que hay que girar en torno a z_{i-1} para que x_{i-1} y x_i queden paralelos.
- Obtener d_i como la distancia, medida a lo largo de z_{i-1}, que habría que desplazar $\{S_{i-1}\}$ para que x_i y x_{i-1} quedasen alineados.

Algoritmo de Denavit-Hartenberg (III)

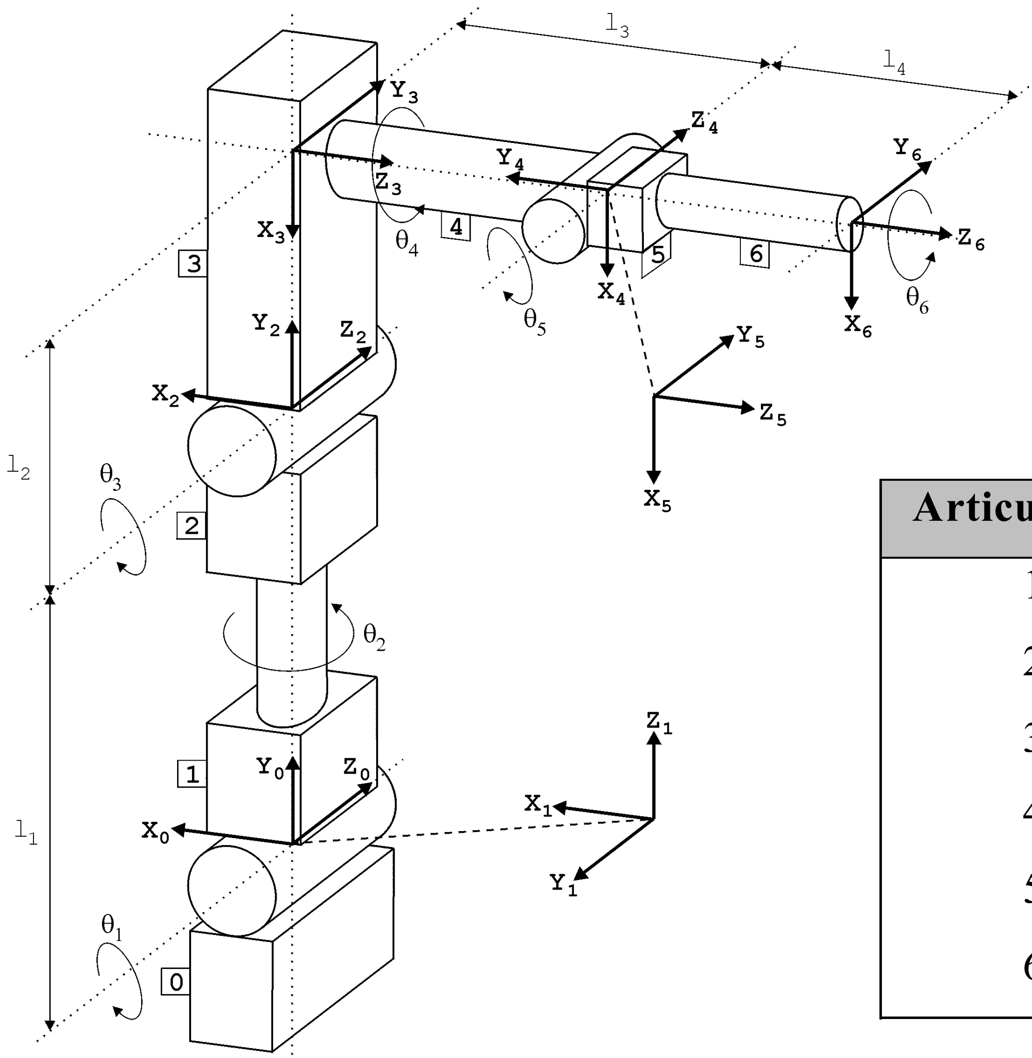
- Obtener a_i como la distancia medida a lo largo de x_i, que ahora coincidiría con x_{i-1}, que habría que desplazar el nuevo $\{S_{i-1}\}$ para que su origen coincidiese con $\{S_i\}$.
- Obtener α_i como el ángulo que habría que girar en torno a x_i, que ahora coincidiría con x_{i-1}, para que el nuevo $\{S_{i-1}\}$ coincidiese totalmente con $\{S_i\}$.
- Obtener las matrices de transformación ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$.
- Obtener la matriz de transformación que relaciona el sistema de la base con el del extremo del robot $\mathbf{T} = {}^{0}\mathbf{A}_1\, {}^{1}\mathbf{A}_2 \cdots {}^{n-1}\mathbf{A}_n$.
- La matriz **T** define la orientación (submatriz de rotación) y posición (submatriz de traslación) del extremo referidas a la base en función de las *n* coordenadas articulares.

Modelo cinemático directo: Ejemplos (I)



Articulación	θ	d	a	α
1	θ_1	l_1	0	0
2	90	d_2	0	90
3	0	d_3	0	0
4	θ_4	l_4	0	0

Modelo cinemático directo: Ejemplos (II)



Articulación	θ	d	a	α
1	θ_1	0	0	-90
2	θ_2	l_1	0	90
3	θ_3-90	0	$-l_2$	90
4	θ_4	l_3	0	-90
5	θ_5	0	0	90
6	θ_6	l_4	0	0

Problema cinemático inverso

- El **objetivo** del problema cinemático inverso consiste en encontrar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares del robot, $\mathbf{q}=\{q_1, q_2, \ldots q_n\}$, para que su extremo se posicione y oriente según una determinada localización espacial.
- La resolución no es sistemática: Depende de la configuración del robot y pueden existir soluciones múltiples.
- <u>Solución cerrada</u>:

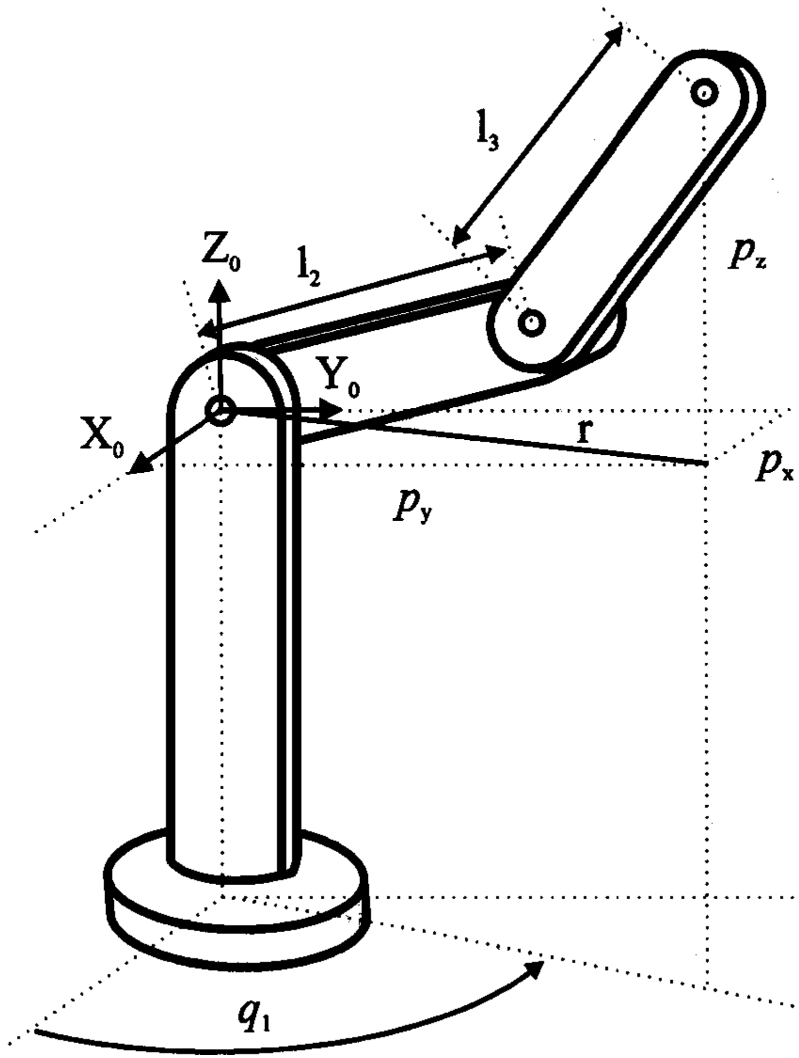
$$q_k = f_k\ (x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)$$

  - Posibilidad de resolución en tiempo real.
  - Posibilidad de incluir restricciones que garanticen la mejor solución.
  - Posibilidad de simplificaciones.
  - No siempre existe.

Obtención del modelo cinemático inverso

- **Métodos geométricos**:
  - Se suele utilizar para obtener los valores de las primeras variables articulares, que son las que posicionan el robot (prescindiendo de la orientación de su extremo).
  - Utilizan relaciones geométricas y trigonométricas sobre los elementos del robot.
- **Matrices de transformación homogénea**:
  - Despejar las *n* variables q_i en función de las componentes de los vectores **n**, **o**, **a** y **p**.
- **Desacoplo cinemático**:
  - Para determinados robots con 6 grados de libertad.
  - Resolución independiente de los grados de libertad que posicionan y de los que orientan.

Resolución por métodos geométricos (I)



$$\boxed{\mathbf{q_1} = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right)}$$

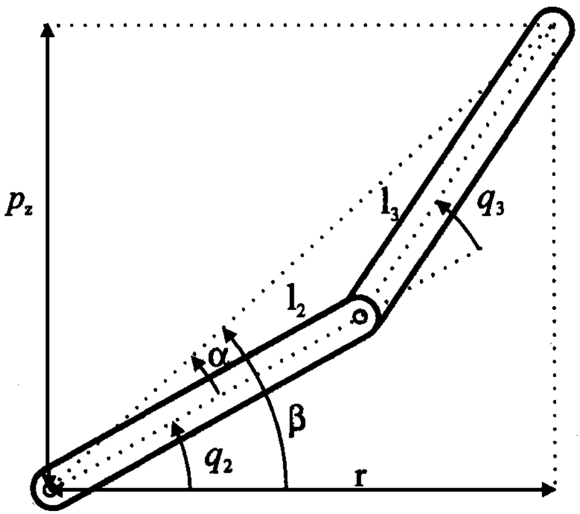
$$\left.\begin{aligned} r^2 &= p_x^2 + p_y^2 \\ r^2 + p_z^2 &= l_2^2 + l_3^2 + 2 l_2 l_3 \cos q_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

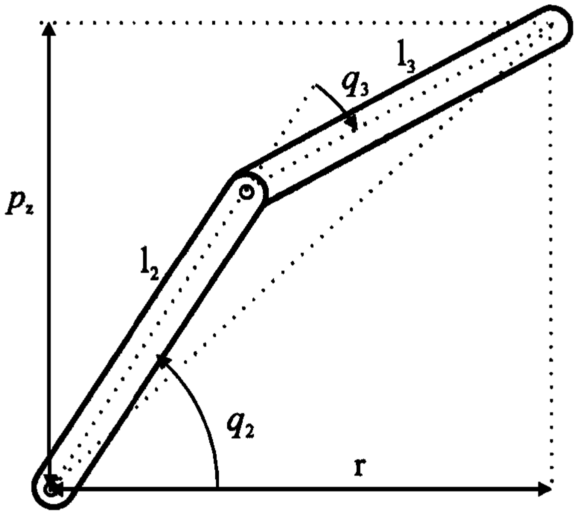
$$\cos q_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2 l_2 l_3}$$

$$\sin q_3 = \pm\sqrt{1 - \cos^2 q_3}$$

$$\boxed{\mathbf{q_3} = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2 q_3}}{\cos q_3}\right)}$$

Resolución por métodos geométricos (II)





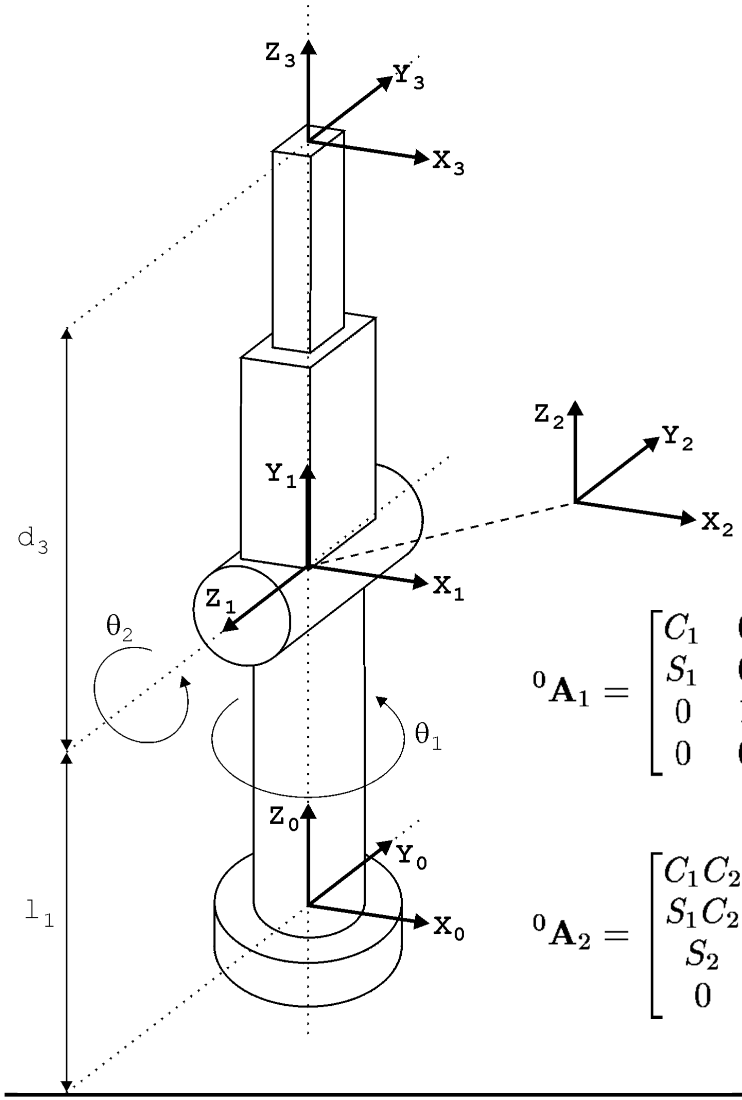
$$q_2 = \beta - \alpha$$

$$\begin{aligned}\beta &= \arctan\left(\frac{p_z}{r}\right)\\ &= \arctan\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right)\end{aligned}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{l_3 \sin q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)$$

$$\boxed{\mathbf{q_2} = \arctan\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right) - \arctan\left(\frac{l_3 \sin q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)}$$

Resolución por matrices de transformación (I)



Articulación	θ	d	a	α
1	θ_1	l_1	0	90
2	θ_2	0	0	-90
3	0	d_3	0	0

$$ {}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^0\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & -C_1S_2 & 0 \\ S_1C_2 & C_1 & -S_1S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & -C_1S_2 & -d_3C_1S_2 \\ S_1C_2 & C_1 & -S_1S_2 & -d_3S_1S_2 \\ S_2 & 0 & C_2 & d_3C_2 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Resolución por matrices de transformación (II)

$$\mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_1\, {}^1\mathbf{A}_2\, {}^2\mathbf{A}_3$$

$$({}^0\mathbf{A}_1)^{-1}\,\mathbf{T} = {}^1\mathbf{A}_2\, {}^2\mathbf{A}_3$$

$$\begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ S_1 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & -S_2 d_3 \\ S_2 & 0 & C_2 & C_2 d_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eligiendo el elemento (3,4):

$$S_1 p_x - C_1 p_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan\theta_1 = \left(\frac{p_y}{p_x}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\theta_1} = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right)}$$

Resolución por matrices de transformación (III)

$$({}^1\mathbf{A}_2)^{-1}\,({}^0\mathbf{A}_1)^{-1}\,\mathbf{T} = \,{}^2\mathbf{A}_3$$

$$\begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ S_1 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_2C_1 & C_2S_1 & S_2 & -l_1S_2 \\ -S_1 & C_1 & 1 & 0 \\ -S_2C_1 & -S_2S_1 & C_2 & -l_1C_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

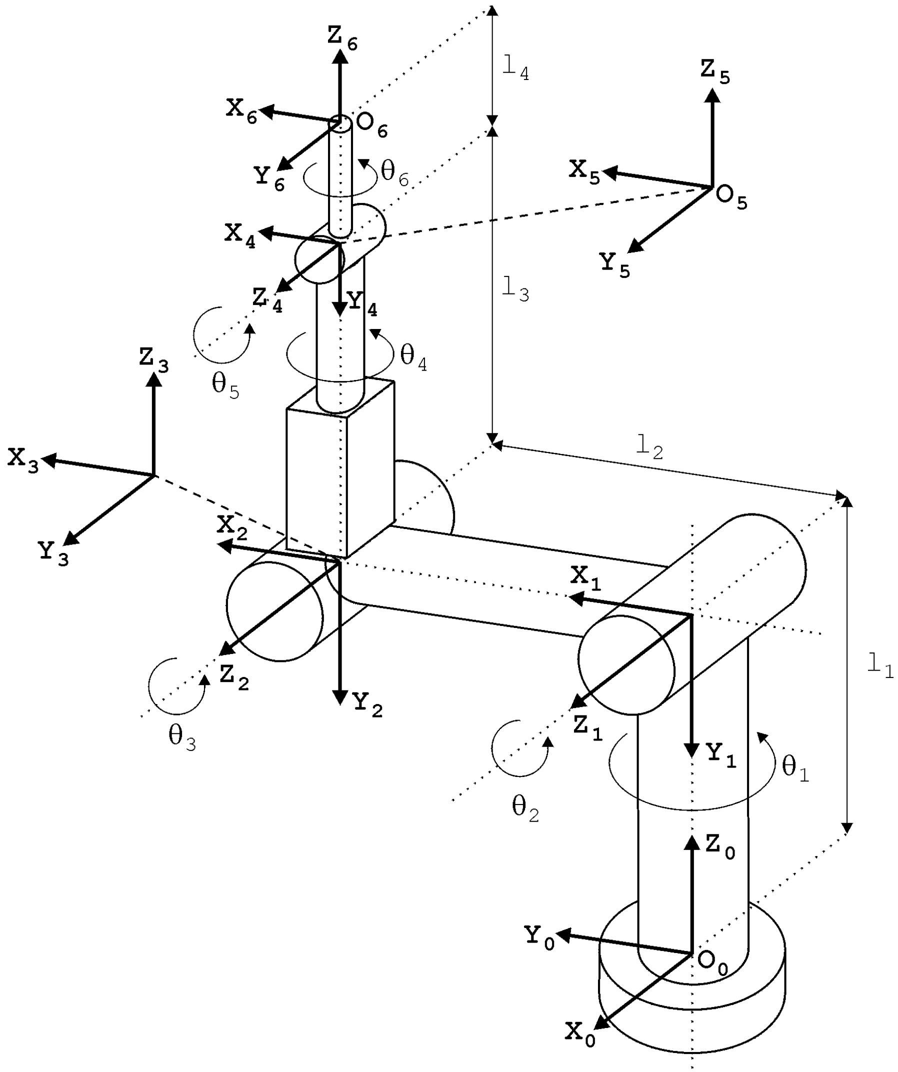
Eligiendo el elemento (1,4):

$$C_2C_1p_x + C_2S_1p_y + S_2p_z - l_1S_2 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\boldsymbol{\theta_2} = \arctan -\frac{C_1p_x + S_1p_y}{p_z - l_1}}$$

Eligiendo el elemento (3,4):

$$-S_2C_1p_x - S_2S_1p_y + C_2p_z - C_2l_1 = d_3 \;\Rightarrow\; \boxed{\mathbf{d_3} = C_2(p_z - l_1) - S_2(C_1p_x + S_1p_y)}$$

Resolución por desacoplo cinemático (I)



Articulación	θ	d	a	α
1	θ_1	l_1	0	-90
2	θ_2	0	l_2	0
3	θ_3	0	0	90
4	θ_4	l_3	0	-90
5	θ_5	0	0	90
6	θ_6	l_4	0	0

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{p_m} = \overline{O_0O_5} \\ \mathbf{p_r} = \overline{O_0O_6}\end{array}\right. \Rightarrow \quad \mathbf{p_m} = \mathbf{p_r} - l_4\mathbf{z_6}$$

$$\mathbf{p_r} = [p_x, p_y, p_z]^T; \qquad \mathbf{z_6} = [a_x, a_y, a_z]^T$$

$$\mathbf{p_m} = \begin{pmatrix} p_{mx} \\ p_{my} \\ p_{mz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x - l_4a_x \\ p_y - l_4a_y \\ p_z - l_4a_z \end{pmatrix}$$

Resolución por desacoplo cinemático (II)

$$ {}^{0}\mathbf{R}_6 = {}^{0}\mathbf{R}_3 \, {}^{3}\mathbf{R}_6 = [\mathbf{n}\ \mathbf{o}\ \mathbf{a}] $$

$$ {}^{3}\mathbf{R}_6 = {}^{3}\mathbf{R}_4 \, {}^{4}\mathbf{R}_5 \, {}^{5}\mathbf{R}_6 = ({}^{0}\mathbf{R}_3)^{-1} \, [\mathbf{n}\ \mathbf{o}\ \mathbf{a}] = ({}^{0}\mathbf{R}_3)^{T} \, [\mathbf{n}\ \mathbf{o}\ \mathbf{a}] $$

$$ {}^{4}\mathbf{R}_5 \, {}^{5}\mathbf{R}_6 = ({}^{3}\mathbf{R}_4)^{T} \, ({}^{0}\mathbf{R}_3)^{T} \, [\mathbf{n}\ \mathbf{o}\ \mathbf{a}] \;\Rightarrow\; \boxed{\boldsymbol{\theta_4} = \arctan \frac{C_1 a_y - S_1 a_x}{C_{23}(C_1 a_x + S_1 a_y) + S_{23} a_z}} $$

$$ {}^{5}\mathbf{R}_6 = ({}^{4}\mathbf{R}_5)^{T} \, ({}^{3}\mathbf{R}_4)^{T} \, ({}^{0}\mathbf{R}_3)^{T} \, [\mathbf{n}\ \mathbf{o}\ \mathbf{a}] $$

$$ \Downarrow $$

$$ \boxed{\boldsymbol{\theta_5} = \arctan \frac{(C_1 C_{23} C_4 - S_1 S_4) a_x + (S_1 C_{23} C_4 + C_1 S_4) a_y - S_{23} C_4 a_z}{C_1 S_{23} a_x + S_1 S_{23} a_y + C_{23} a_z}} $$

$$ \boxed{\boldsymbol{\theta_6} = \arctan \frac{-(C_1 C_{23} S_4 + S_1 C_4) n_x + (C_1 C_4 - S_1 C_{23} S_4) n_y + S_{23} S_4 n_z}{-(C_1 C_{23} S_4 + S_1 C_4) o_x + (C_1 C_4 - S_1 C_{23} S_4) o_y + S_{23} S_4 o_z}} $$

Matriz Jacobiana

Velocidad de las articulaciones $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$ $\xrightarrow{\textbf{Jacobiana directa}}$ Velocidades del extremo del robot $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$

Velocidades del extremo del robot $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$ $\xrightarrow{\textbf{Jacobiana inversa}}$ Velocidad de las articulaciones $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$

$$\dot{q}_1 = f_1(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$$
$$\dot{q}_2 = f_2(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$$
$$\vdots$$
$$\dot{q}_n = f_n(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$$

$$\dot{x} = f_x(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$$
$$\dot{y} = f_y(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$$
$$\dot{z} = f_z(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$$
$$\dot{\alpha} = f_\alpha(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$$
$$\dot{\beta} = f_\beta(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$$
$$\dot{\gamma} = f_\gamma(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$$

Jacobiana directa

$$x = f_x(q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad y = f_y(q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad z = f_z(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$
$$\alpha = f_\alpha(q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad \beta = f_\beta(q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad \gamma = f_\gamma(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

$$\dot{x} = \sum_1^n \frac{\partial f_x}{\partial q_i}\dot{q}_i \qquad \dot{y} = \sum_1^n \frac{\partial f_y}{\partial q_i}\dot{q}_i \qquad \dot{z} = \sum_1^n \frac{\partial f_z}{\partial q_i}\dot{q}_i$$
$$\dot{\alpha} = \sum_1^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i}\dot{q}_i \qquad \dot{\beta} = \sum_1^n \frac{\partial f_\beta}{\partial q_i}\dot{q}_i \qquad \dot{\gamma} = \sum_1^n \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \qquad \text{con } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_x}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_n} \end{bmatrix} \Rightarrow \textbf{Matriz Jacobiana}$$

Jacobiana inversa

- **Inversión simbólica de la matriz Jacobiana:**
  - Gran complejidad: matriz 6x6 de funciones trigonométricas.
- **Evaluación e inversión numérica de la matriz Jacobiana:**
  - Necesidad de recómputo continuo.
  - En ocasiones **J** no es cuadrada 〈 Matriz pseudoinversa $(\mathbf{J}\ \mathbf{J}^{\mathbf{T}})^{-1}$.
  - En ocasiones el determinante de **J** es nulo: configuraciones singulares.
- **A partir del modelo cinemático inverso**:

$$
\begin{aligned}
q_1 &= f_1(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) \\
&\vdots \\
q_n &= f_n(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \gamma} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial \gamma} \end{bmatrix}
$$

Configuraciones singulares

- Jacobiano (determinante de la matriz jacobiana) nulo.
- Incremento infinitesinal en coordenadas cartesianas implica incremento infinito en coordenadas articulares.
- Implica pérdida de algún grado de libertad.
- Tipos:
  - En los límites del espacio de trabajo del robot.
  - En el interior del espacio de trabajo del robot.
- Requieren su estudio y eliminación.